

Zestaw III

Zadanie 1.

Dana jest liczba $a = \log_{12} 27$. Wyraż $\log_6 16$ za pomocą liczby a . Zapisz obliczenia.

Zadanie 2.

Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz, ile co najmniej razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jeden raz sześciu oczek było większe od 0,75.

Zadanie 3.

Liczby x, y spełniają warunki $x + y = 3$ i $x^2 + y^2 = 7$. Udowodnij, że wartość wyrażenia $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ wynosi 18.

Zadanie 4.

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego malejącego ciągu geometrycznego wynosi 9, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 40,5. Oblicz sumę sześcianów wyrazów tego ciągu.

Zadanie 5.

Rozwiąż równanie $\cos x + \cos 7x - 2\sin^2 2x + 1 = 0$, gdzie $x \in (0, \pi)$.

Zadanie 6.

W kwadracie o boku długości 1 znajdują się dwa okręgi styczne zewnętrznie i styczne do sąsiednich boków kwadratu. Udowodnij, że suma długości promieni tych okręgów jest równa $2 - \sqrt{2}$.

Zadanie 7.

W trapezie prostokątnym dłuższa przekątna ma długość 24 i zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego trapezu. Odległość wierzchołka kąta rozwartego trapezu od dłuższej przekątnej wynosi 9. Oblicz pole trapezu.

Zadanie 8.

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x)$ równoległych do prostej $y=6x$.

Zadanie 9.

Podstawą ostrosłupa trójkątnego jest trójkąt prostokątny, którego jeden z kątów ostrych ma miarę α . Każda z krawędzi bocznych ma długość b i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze β . Oblicz objętość ostrosłupa.

Zadanie 10.

Dane jest równanie z parametrem m : $x^2 + 3 = m + (2m + 1)x$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których powyższe równanie ma dwa pierwiastki dodatnie.

Zadanie 11.

Okręgi $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ i $x^2 + y^2 + 6x + 10y + m = 0$ są styczne wewnętrznie. Wyznacz wartość parametru m . Wyznacz punkt styczności tych okręgów.

Zadanie 12.

Niech $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ gdzie $x \in (-6, -1)$. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)$.